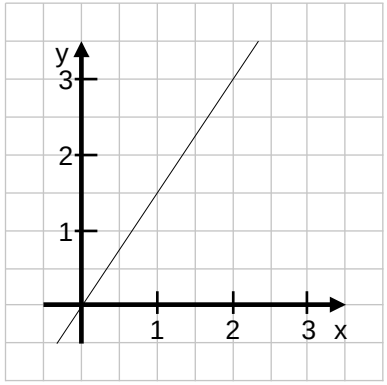
Direkt und indirekt proportionale Größen

Direkte Proportionalität

x und y sind direkt proportional, wenn

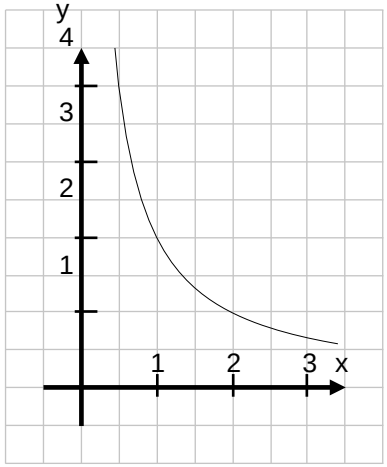
- zum doppelten, dreifachen, …, n-fachen Wert für x der doppelte, dreifache, …, n-fache Wert von y gehört
- die Wertepaare quotientengleich sind, d.h. $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ usw.
- das x-y-Diagramm eine Ursprungsgerade ist



Indirekte Proportionalität

x und y sind indirekt proportional, wenn

- zum doppelten, dreifachen, …, n-fachen Wert für x der halbe, gedrittelte, …, $\frac{1}{n}$-fache Werte von y gehört
- die Wertepaare produktgleich sind, d.h. $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$ usw.
- das x-y-Diagramm eine Hyperbel ist



Funktionsbegriff

Definitionen und Regeln

Eine Zuordnung $f : x \mapsto y$, die jedem x genau einen Wert y zuordnet, heißt **Funktion**.

Bezeichnungen:

- y heißt **Funktionswert**
- $f\,(x)$ heißt **Funktionsterm**
- $y = f\,(x)$ heißt **Funktionsgleichung**
- **Definitionsmenge D:** Menge der Zahlen, die für x eingesetzt werden dürfen
- **Wertemenge W:** Menge der Zahlen, die zugeordnet werden

Funktionen können durch **Wertetabellen oder Graphen** veranschaulicht werden.

Beispiele

Beispiel	**Bezeichnung**	**Allgemein**
x^2	Funktionsterm	$f\,(x)$
$f: x \mapsto x^2$	Funktion	$f: x \mapsto f\,(x)$
$y = x^2$	Funktionsgleichung	$y = f(x)$
$D = \mathbb{Q}$	Definitionsmenge	D
$W = \mathbb{Q}_0^+$	Wertemenge	W

Lineare Funktionen

Definitionen und Regeln

Die Funktion $f: x \mapsto mx + t$ ist eine **lineare Funktion**.

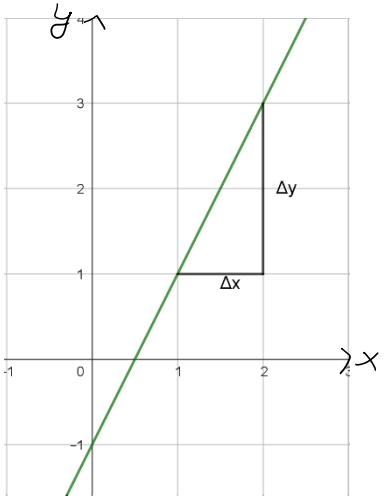
Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.
Der Parameter m heißt **Steigung**, t heißt **y-Achsenabschnitt**.
Der y-Achsenabschnitt gibt dabei die Stelle an, bei welcher der Graph der Funktion die y-Achse schneidet.

Berechnung der Steigung m:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{senkrechte\ Kathete}{waagrechte\ Kathete}$$ eines Steigungsdreiecks

Beispiele



y = 2x – 1

mit $m = \frac{3-1}{2-1} = 2$

und $t = -1$

Lineare Gleichungssysteme (rechnerische Lösung)

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Ein **Gleichungssystem** besteht aus mehreren Gleichungen mit denselben Unbekannten. Die Lösungen eines **linearen Gleichungssystems (GLS)** mit zwei Variablen sind diejenigen Zahlenpaare, die jede der beiden Gleichungen erfüllen.	(1) $-2x + y = 2 \Rightarrow$ (1*) $y = 2x + 2$ (2) $x - y = -3 \Rightarrow$ (2*) $y = x + 3$
Gleichsetzverfahren: geht nur, wenn zwei Seiten von verschiedenen Gleichungen gleich sind; diese dann gleichsetzen	**Gleichsetzverfahren**: (1*) = (2*) $2x + 2 = x + 3 \Rightarrow x = 1$
Einsetzverfahren: geht immer; eine Gleichung nach einer Variablen auflösen und in die zweite Gleichung einsetzen	**Einsetzverfahren:** z. B. (2*) in (1) $-2x + (x + 3) = 2 \Rightarrow -x = -1 \Rightarrow x = 1$
Additionsverfahren: nicht immer günstig; Gleichungen so multiplizieren und dann addieren/ subtrahieren, dass eine Variable wegfällt	**Additionsverfahren:** z. B. (1) + 2 · (2) $-2x + y + 2 \cdot (x - y) = 2 + 2 \cdot (-3) \Rightarrow y = 4$
	Durch Einsetzen in (1*) oder (2*) erhält man den Wert der jeweils anderen Variable $\Rightarrow$ **L = {(1|4)}**

Gebrochen-rationale Funktionen

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Terme mit einer Variablen im Nenner heißen **Bruchterme**.	$\frac{2}{x}, \frac{3}{x+2}$
Funktionen, deren Funktionsterme Bruchterme enthalten, nennt man **gebrochen-rationale Funktionen**.	f: x ↦ $\frac{4}{x-3}$, g: x ↦ $\frac{-2}{x^2}$ + 1
Werte, für die der Nenner null wird, gehören nicht zur Definitionsmenge. Man nennt sie **Definitionslücken**.	h: x ↦ $\frac{2}{x-1{,}5}$, D = ℚ \ {1,5}
Eine Gerade, der sich der Graph einer Funktion beliebig nahe annähert, nennt man **Asymptote** des Funktionsgraphen. Graphen von gebrochen-rationalen Funktionen können waagrechte und senkrechte Asymptoten besitzen.	i: x ↦ $\frac{1}{x+2}$ + 1: D = ℚ \ {–2} senkrechte Asymptote: x = –2 waagrechte Asymptote: y = 1

Verschiebung von Hyperbeln

Definitionen und Regeln

Der Graph der Funktion f: $x \mapsto \frac{a}{x+b} + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$; $a \neq 0$) entsteht aus dem Graphen von $x \mapsto \frac{1}{x}$ durch

- **Verschiebung um $|b|$ Einheiten in x-Richtung** (für b > 0 nach links und für b < 0 nach rechts)
- **Verzerrung in y-Richtung mit Faktor a**
- **Verschiebung um $|c|$ Einheiten in y-Richtung** (für c > 0 nach oben und für c < 0 nach unten)

Der Graph der Funktion f besitzt die senkrechte Asymptote mit der Gleichung x = –b und die waagrechte Asymptote mit der Gleichung y = c.

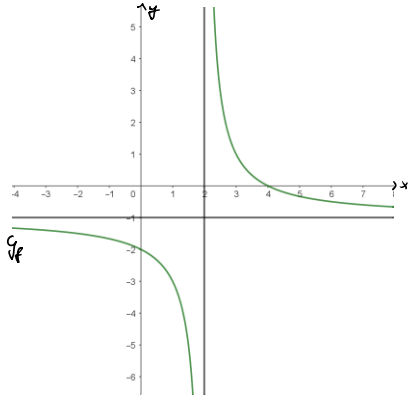
Beispiele

f: $x \mapsto \frac{2}{x-2} - 1$: D = $\mathbb{Q} \setminus \{2\}$

- Verschiebung um 2 Einheiten nach rechts
- Verzerrung in y-Richtung mit Faktor 2
- Verschiebung um 1 Einheit nach unten

senkrechte Asymptote: x = 2

waagrechte Asymptote: y = –1



Grundlagen zu Bruchtermen

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Bestimmung der Definitionsmenge: Enthält ein Bruchterm genau eine Variable, so gibt man an, welche Zahlen der Grundmenge für die Variable eingesetzt werden dürfen. Diese Zahlenmenge heißt **Definitionsmenge** des Bruchterms. Es müssen diejenigen Einsetzungen ausgeschlossen werden, bei denen durch Null dividiert wird.	$G = \mathbb{Q}$; $\frac{3+x}{x^2-x} = \frac{3+x}{x\,(x-1)} \quad \Rightarrow \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 1\}$
Kürzen und Erweitern von Bruchtermen: Einen Bruch **kürzen** bedeutet, dass Zähler und Nenner durch den gleichen Term dividiert werden.	$\frac{(a+b)\cdot(c+d)}{(a-b)\cdot(c+d)} \overset{:(c+d)}{=} \frac{a+b}{a-b}$
Einen Bruch **erweitern** bedeutet, dass Zähler und Nenner mit dem gleichen Term multipliziert werden.	$\frac{a}{b} \overset{\cdot(c+d)}{=} \frac{a\cdot(c+d)}{b\cdot(c+d)}$

Rechnen mit Bruchtermen

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Addierung und Subtrahieren: Beim **Addieren** bzw. **Subtrahieren** von Bruchtermen mit gleichem Nenner addiert bzw. subtrahiert man die Zähler und behält den Nenner bei.	$\frac{4}{3x-2}-\frac{3x+5}{3x-2}=\frac{4-(3x+5)}{3x-2}=\frac{4-3x-5}{3x-2}=\frac{-3x-1}{3x-2}$
Bruchterme mit verschiedenen Nennern muss man vorher durch Kürzen oder Erweitern auf den gleichen Nenner bringen.	$\frac{7x-6}{x^2-3x}+\frac{2}{x}=\frac{7x-6}{x\,(x-3)}+\frac{2}{x}=\frac{7x-6}{x\,(x-3)}+\frac{2\cdot(x-3)}{x\cdot(x-3)}=\frac{7x-6+2\cdot(x-3)}{x\,(x-3)}=\frac{7x-6+2x-6}{x\,(x-3)}$ $=\frac{9x-12}{x\,(x-3)}$
Multiplizieren und Dividieren: Bruchterme werden miteinander **multipliziert**, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.	$\frac{2}{x+1}\cdot\frac{-x}{x-3}=\frac{2\cdot(-x)}{(x+1)\cdot(x-3)}=-\frac{2x}{(x+1)(x-3)}$
Durch einen Bruch wird **dividiert**, indem man mit seinem Kehrbruch multipliziert.	$\frac{1}{2x+1}:\frac{2}{x-1}=\frac{1}{2x+1}\cdot\frac{x-1}{2}=\frac{1\cdot(x-1)}{(2x+1)\cdot 2}=\frac{x-1}{2\,(2x+1)}$
Beachte: Gegebenenfalls kürzen!	$\frac{2x-6}{x+1}\cdot\frac{-x}{x-3}=\frac{2\,(x-3)}{x+1}\cdot\frac{-x}{x-3}=\frac{2}{x+1}\cdot\frac{-x}{1}=\frac{2\cdot(-x)}{x+1}=\frac{-2x}{x+1}$

Bruchgleichungen

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Eine Gleichung heißt **Bruchgleichung,** wenn die Variable in mindestens einem Nenner auftritt.	$\frac{4}{x-6} = \frac{2}{x}$
Lösungsstrategie:	**Rechenweg:**
1. Hauptnenner suchen	1. HN: $x \cdot (x - 6)$
2. Definitionsmenge bestimmen	2. $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 6\}$ (Nullstellen des Hauptnenners)
3. Beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren und gleichzeitig kürzen	3. $4x = 2 \cdot (x - 6)$
4. Gleichung lösen	4. $4x = 2x - 12$ $2x = -12$ $x = -6$
5. Lösungsmenge angeben (Definitionsmenge beachten!)	5. $L = \{-6\}$

Rechengesetze für Potenzen

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Für a, b ≠ 0 und ganzzahlige Exponenten p und q gilt:	
$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ bzw. $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$3^5 \cdot 3^{-2} = 3^{5+(-2)} = 3^3 = 27$ $\frac{6^{-3}}{6^{-4}} = 6^{-3-(-4)} = 6^1 = 6$
$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$ bzw. $\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$	$4^2 \cdot 5^2 = (4 \cdot 5)^2 = 20^2 = 400$ $\frac{2^3}{4^3} = \left(\frac{2}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$	$(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$
Ferner gilt (n ∈ ℕ):	
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} = 1\,\frac{9}{16}$

Laplace – Experimente

Definitionen und Regeln

Ein Zufallsexperiment ist ein Experiment, bei dem verschiedene Ergebnisse eintreten können.

Ein **Laplace-Experiment** ist ein Zufallsexperiment, bei dem jedes der möglichen Ergebnisse gleichwahrscheinlich ist.

Sind bei einem Laplace-Experiment n verschiedene Ergebnisse möglich, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für jedes dieser Ergebnisse $\frac{1}{n}$.

Die Menge aller möglichen Ergebnisse nennt man **Ergebnisraum Ω.**

Beispiele

a) Ein idealer Würfel (auch Laplace-Würfel genannt) hat den Ergebnisraum Ω = {1; 2; 3; 4; 5; 6} und es gilt

$$P(1) = P(2) = \ldots = P(6) = \frac{1}{6}$$

b) Eine ideale Münze (auch Laplace-Münze genannt) hat den Ergebnisraum Ω = {K; Z} und es gilt $P(K) = P(Z) = \frac{1}{2}$

Laplace – Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Fasst man bestimmte Ergebnisse eines Zufallsexperiments zu einer Menge zusammen, so erhält man ein **Ereignis**. Die Ergebnisse, die zu einem Ereignis gehören, nennt man **günstige Ergebnisse.** Sind alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich, so ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A: $\mathbf{P\ (A) =} \frac{\textbf{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\textbf{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$	a) Werfen eines Würfels: Ereignis A: „ungerade Zahl“ $P\ (A) = P\ (\{1;3;5\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ b) Werfen eines Würfels: Ereignis B: „5 oder 6“ $P\ (B) = P\ (\{5;6\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Zählprinzip

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Zählprinzip: Sucht man bei einem mehrstufigem Zufallsexperiment die Anzahl der möglichen Ergebnisse, so ermittelt man die Anzahl der Möglichkeiten der einzelnen Stufen und multipliziert diese miteinander.	a) Es sollen drei Plätze besetzt werden. Für den 1. Platz gibt es n_1, für den 2. Platz n_2 und für den 3. Platz n_3 Möglichkeiten. So gibt es insgesamt $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ Möglichkeiten. b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass sich Otto, Anna und Emma auf vier Stühle setzen? Otto Anna Emma 4 · 3 · 2 = 24 Möglichkeiten c) Wie viele verschiedene vierstellige natürliche Zahlen kann man aus den Ziffern 1, 3, 9 und 0 bilden, wenn jede dieser Ziffern i) genau einmal ii) auch mehrfach vorkommen darf? i) $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ (Null steht nie vorne) ii) $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$

Kreisumfang und Kreisfläche

Definitionen und Regeln

Kreiszahl: $\pi = 3{,}1415\ldots$ $\pi \approx 3{,}14$

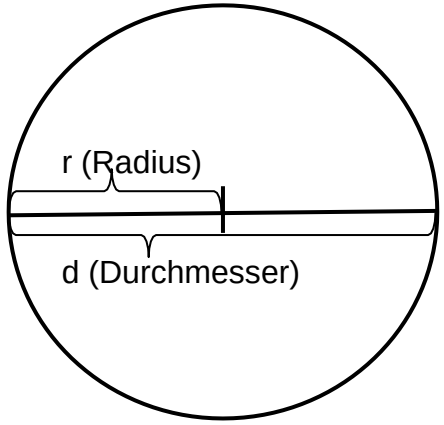
Kreisumfang: $U = d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi$

Der Umfang und der Radius sind direkt proportional zueinander, d. h. verdoppelt man den Radius r, so verdoppelt sich auch der Umfang U.

Kreisfläche: $A = r^2 \cdot \pi$

Der Flächeninhalt ist eine quadratische Funktion des Radius, d. h. verdreifacht man den Radius r, so verneunfacht sich der Flächeninhalt A.

Beispiele



Prisma und Zylinder

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Für den **Oberflächeninhalt O** und das **Volumen V** eines geraden Prismas mit der Grundfläche G, der Höhe h und der Mantelfläche M gilt: $\mathbf{O = 2 \cdot G + M}$ $\mathbf{V = G \cdot h}$	Gegeben ist ein gerades Prisma mit der Höhe h = 3 cm, dessen Grundfläche ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundseitenlängen 8 cm und 2 cm, den Schenkellängen 5 cm, sowie der Höhe 4 cm ist. $O = 2 \cdot G + M$ $= 2 \cdot \frac{8\ cm + 2\ cm}{2} \cdot 4\ cm + 2 \cdot 5\ cm \cdot 3\ cm + 8\ cm \cdot 3\ cm + 2\ cm \cdot 3\ cm =$ $= 100\ cm^2$ $V = G \cdot h = \frac{8\ cm + 2\ cm}{2} \cdot 4\ cm \cdot 3\ cm = 60\ cm^3$
Für den **Oberflächeninhalt O**, den **Mantelflächeninhalt M** und das **Volumen V** eines geraden Zylinders mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h gilt: $\mathbf{M = 2\pi r \cdot h}$ $\mathbf{O = 2 \cdot G + M = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h}$ $\mathbf{V = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h}$	Ein Zylinder hat einen Radius von r = 4 cm und eine Höhe von h = 10 cm. $M = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 4\ cm \cdot 10\ cm \approx 251{,}33\ cm^2$ $O = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot (4\ cm)^2 + 2\pi \cdot 4\ cm \cdot 10\ cm \approx 351{,}86\ cm^2$ $V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot (4\ cm)^2 \cdot 10\ cm \approx 502{,}65\ cm^3$