Rechnen mit Quadratwurzeln

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Die **Quadratwurzel aus a** ist diejenige nichtnegative Zahl aus $\mathbb{R}$, deren Quadrat wieder a ergibt. a nennt man **Radikand**. Man schreibt dafür $\sqrt{a}$ und es gilt $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$	
Für beliebige rationale Zahlen a gilt: $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$	
Multiplikationsregel: Für beliebige $a, b \in \mathbb{Q}_0^+$ gilt: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$
Divisionsregel: Für beliebige $a \in \mathbb{Q}_0^+, b \in \mathbb{Q}^+$ gilt: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$
Summen und Differenzen dürfen <u>nicht gliedweise radiziert</u> werden!	$\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$!!!

Binomische Formeln

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Zur Erleichterung beim Multiplizieren gleicher bzw. ähnlicher Summen verwendet man die **Binomischen Formeln**:	
1. Binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ → „**Plus – Formel**“	a) $(3a + 4b)^2 = 9a^2 + 2\cdot 3a\cdot 4b + 16b^2 = 9a^2 + 24ab + 16b^2$
2. Binomische Formel: $(a – b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ → „**Minus – Formel**“	b) $(3a – 4b)^2 = 9a^2 - 2\cdot 3a\cdot 4b + 16b^2 = 9a^2 - 24ab + 16b^2$
3. Binomische Formel: $(a + b) \cdot (a – b) = a^2 – b^2$ → „**Plus – Minus – Formel**“	c) $(3a + 4b) \cdot (3a – 4b) = 9a^2 - 16b^2$
	d) $\sqrt{9a^2 - 6a + 1} = \sqrt{(3a-1)^2} = \lvert 3a - 1 \rvert$

Quadratische Funktionen

Definitionen und Regeln

Die Funktion $f: x \longmapsto ax^2 + bx + c$ heißt allgemeine **quadratische Funktion** und ihr Graph ist eine **Parabel**.

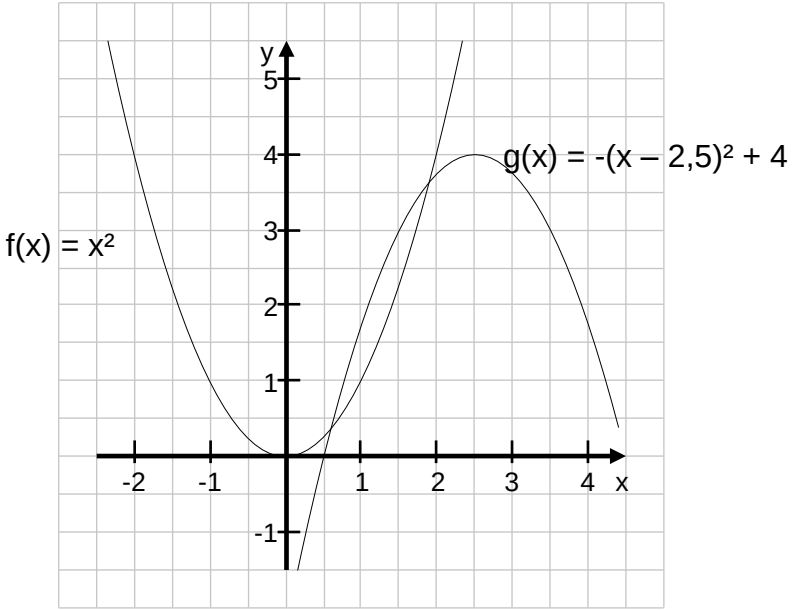
Der Graph der Funktion $f: x \longmapsto a(x - x_S)^2 + y_S$ ist eine Parabel mit **Scheitel S** (x_S | y_S).
Diese Form des Funktionsterms nennt man auch **Scheitelpunktform,** weil der Scheitel daraus direkt abgelesen werden kann.

Auswirkungen des Koeffizienten a auf den Graph der Funktion:

- Für a > 0 ist die Parabel nach oben geöffnet,
  für a < 0 nach unten geöffnet.

- Für |a| > 1 ist die Parabel enger,
  für |a| < 1 weiter als die **Normalparabel f(x) = x²**

Definition und Regeln



Scheitelbestimmung durch quadratische Ergänzung:

$f(x) = -2x^2 + 12x - 24 = -2(x^2 - 6x + 9 - 9) - 24 =$

$= -2(x^2 - 6x + 9) + 18 - 24 = -2(x - 3)^2 - 6$

Quadratische Gleichungen

Definitionen und Regeln

Die **allgemeine Gleichung**

$$ax^2 + bx + c = 0 \ \ (a \neq 0; a, b, c \ \in \mathbb{R})$$

besitzt

- keine Lösung, wenn D < 0
- genau eine Lösung, wenn D = 0
- zwei Lösungen, wenn D > 0

wobei D = b² - 4ac die **Diskriminante** der quadratischen Gleichung ist.

Für die Lösung gilt: $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(Mitternachtsformel, Lösungsformel)

Definition und Regeln

a) $2x^2 + 7x + 3 = 0$

D = 7² - 4 · 3 · 2 = 25 → zwei verschiedene Lösungen

$x_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm 5}{4} = \begin{cases} -0{,}5 \\ -3 \end{cases}$

b) $x^2 + 12x + 39 = 0$

D = 12² - 4 · 39 = -12 < 0 → keine Lösung

c) $x^2 + 2x + 1 = 0$

D = 2² - 4 ·1 = 0 → eine Lösung

$x_1 = x_2 = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$

Satzgruppe des Pythagoras

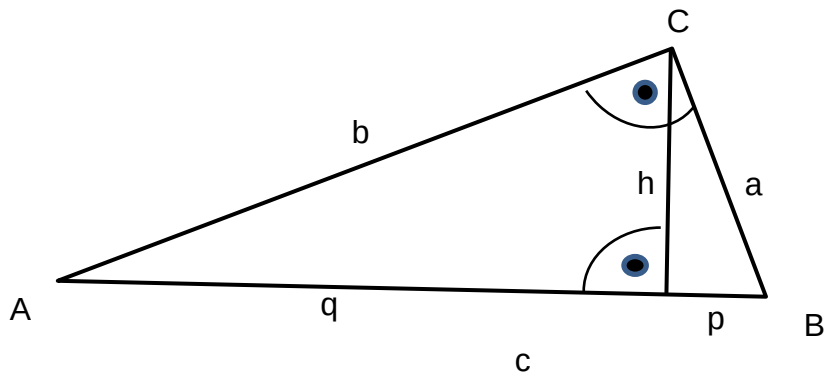
Definitionen und Regeln

In einem rechtwinkligen Dreieck mit rechtem Winkel bei C gelten folgende Sätze:

1. **Höhensatz:**
   In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe flächengleich dem Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten:
   $$h^2 = p \cdot q$$

2. **Kathetensatz:**
   In einem rechtwinkligen Dreieck ist jedes Kathetenquadrat flächengleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt:
   $$a^2 = c \cdot p \quad \text{und} \quad b^2 = c \cdot q$$

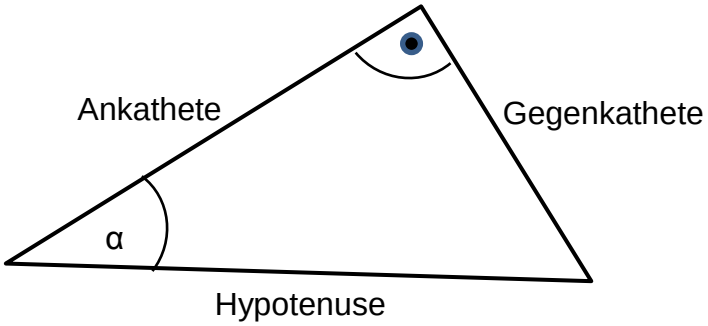
Beispiele



3. **Satz des Pythagoras/ Hypotenusensatz:**
   In jedem rechtwinkligen Dreieck haben die Quadrate über den Katheten den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse:
   $$a^2 + b^2 = c^2$$

Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck

Definitionen und Regeln



Es wird definiert:

$$Sinus\ \alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$$

$$Cosinus\ \alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$$

$$Tangens\ \alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$

Beispiele

Zusammenhänge:

$\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$ sowie $tan\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha}$

$(sin\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$ (Trigonometrischer Pythagoras)

Besondere Werte:

α	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	0 $=\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}$ $=\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $=\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $=\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1 $=\frac{1}{2}\sqrt{4}$
cos α	1 $=\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $=\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $=\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$ $=\frac{1}{2}\sqrt{1}$	0 $=\frac{1}{2}\sqrt{0}$
tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert

Mehrstufige Zufallsexperimente

Definitionen und Regeln

Pfadregeln:

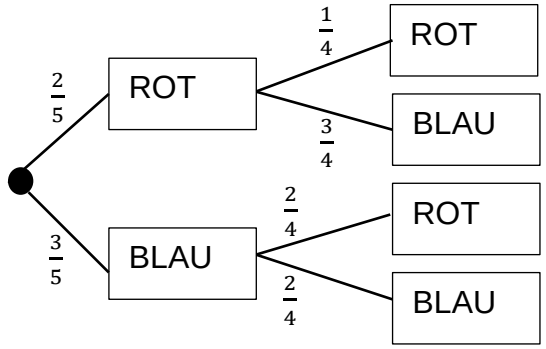
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm.

- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören.

Beispiele

Aus einer Urne mit zwei roten und drei blauen Kugeln werden nacheinander 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Baumdiagramm:



Ergebnisraum Ω = { RR, RB, BR, BB}

P(RR) = $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$; P(BB) = $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

P(zwei verschiedene Kugeln) = P(RB) + P(BR) =

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

Potenzen mit rationalen Exponenten

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Festlegung: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ und $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	a) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$ b) $16^{-\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{16}\right)^{-1} = \frac{1}{4}$ c) $27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 9$
Es gelten weiterhin die Potenzgesetze (siehe Karte 7.4): • Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert/ dividiert, indem man die Exponenten addiert/ subtrahiert.	$9^{\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} = 9^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$ bzw. $4^{-\frac{2}{3}} : 4^{-\frac{1}{6}} = 4^{-\frac{2}{3}-(-\frac{1}{6})} = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$
• Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert/ dividiert, indem man die Basen multipliziert/ dividiert und den Exponent beibehält.	$9^{\frac{1}{6}} \cdot 4^{\frac{1}{6}} = (9 \cdot 4)^{\frac{1}{6}} = 36^{\frac{1}{6}}$ bzw. $27^{\frac{1}{2}} : 3^{\frac{1}{2}} = (27:3)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$
• Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten miteinander multipliziert und die Basis beibehält.	$\left(9^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = 9^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$
Addieren und Subtrahieren gleichartiger Terme wie gehabt →	$7x^{\frac{4}{5}} - 3x^{\frac{4}{5}} + 2x^{\frac{2}{5}} - 9x^{\frac{2}{5}} = 4x^{\frac{4}{5}} - 7x^{\frac{2}{5}}$