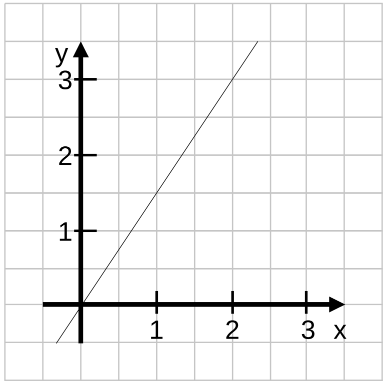
Direkt und indirekt proportionale Größen

Direkte Proportionalität

x und y sind direkt proportional, wenn

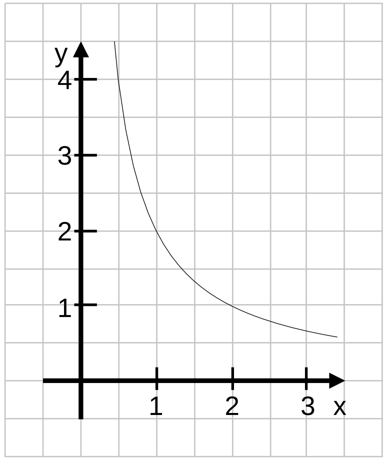
- zum doppelten, dreifachen, …, n-fachen Wert für x der doppelte, dreifache, …, n - fache Wert von y gehört
- die Wertepaare quotientengleich sind, d.h. $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$
- das x – y – Diagramm eine Ursprungsgerade ist



Indirekte Proportionalität

x und y sind indirekt proportional, wenn

- zum doppelten, dreifachen, …, n-fachen Wert für x der halbe, gedrittelte, …, $\frac{1}{n}$– fache Werte von y gehört
- die Wertepaare produktgleich sind, d.h. $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$
- das x – y – Diagramm eine Hyperbel ist



Funktionsbegriff

Definitionen und Regeln | *Beispiele*

Eine Zuordnung $f : x \longmapsto y$, die jedem x genau einen Wert y zuordnet, heißt **Funktion**.

Bezeichnungen:

- y heißt **Funktionswert**
- $f(x)$ heißt **Funktionsterm**
- $y = f(x)$ heißt **Funktionsgleichung**
- **Definitionsmenge D:** Menge der Zahlen, die für x eingesetzt werden dürfen
- **Wertemenge W:** Menge der Zahlen, die zugeordnet werden

Funktionen können durch **Wertetabellen oder Graphen** veranschaulicht werden.

Beispiel	Bezeichnung	Allgmein
x^2	Funktionsterm	$f(x)$
$f: x \longmapsto x^2$	Funktion	$f: x \longmapsto f(x)$
$y = x^2$	Funktionsgleichung	$y = f(x)$
$D = \mathbb{Q}$	Definitionsmenge	D
$W = \mathbb{Q}_0^+$	Wertemenge	W

Kreisumfang und Kreisfläche

Definitionen und Regeln	*Beispiele*

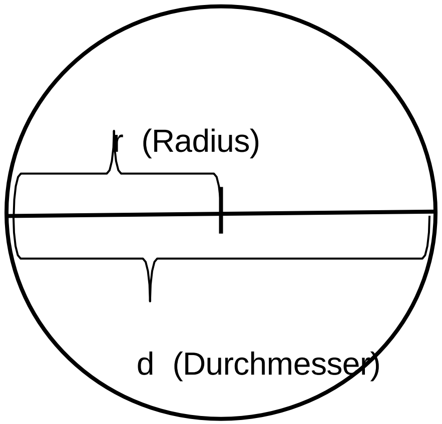
Kreiszahl: $\pi = 3{,}1415\ldots\ldots \rightarrow \pi \approx 3{,}1415$

Kreisumfang: $U = d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi$

Der Umfang und der Radius sind direkt proportional zueinander, d.h. verdoppelt man den Radius r, so verdoppelt sich auch der Umfang U.

Kreisfläche: $A = r^2 \cdot \pi$

Der Flächeninhalt ist eine quadratische Funktion des Radius, d.h. verdreifacht man den Radius r, so verneunfacht sich der Flächeninhalt A.



Lineare Funktionen

Definitionen und Regeln	*Beispiele*

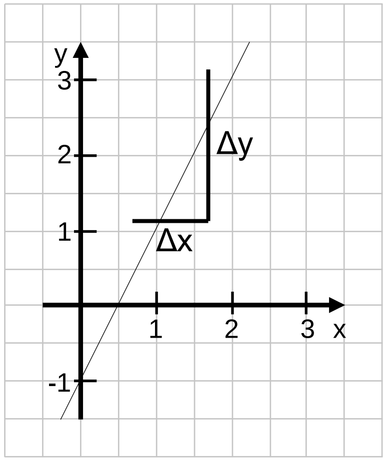
Die Funktion $f\colon x \longmapsto mx + t$ ist eine **lineare Funktion**.

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.
Der Parameter m heißt **Steigung**, t heißt **y-Achsenabschnitt**.
Der y-Achsenabschnitt gibt dabei die Stelle an, bei welcher der Graph der Funktion die y-Achse schneidet.

Berechnung der Steigung m:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{oder}$$

$$m = \frac{\textit{senkrechte Kathete}}{\textit{waagrechte Kathete}} \ \textit{eines Steigungsdreiecks}$$



y = 2x – 1

mit m = $\frac{3-1}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$

und t = -1

Lineare Gleichungssysteme (rechnerische Lösung)

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Ein **Gleichungssystem** besteht aus mehreren Gleichungen mit denselben Unbekannten. Die Lösungen eines **linearen Gleichungssystems (GLS)** mit zwei Variablen sind diejenigen Zahlenpaare, die jede der beiden Gleichungen erfüllen.	(1) $-2x + y = 2 \Rightarrow$ (1*) $y = 2x + 2$ (2) $x - y = -3 \Rightarrow$ (2*) $y = x + 3$
Gleichsetzverfahren: geht nur, wenn zwei Seiten von verschiedenen Gleichungen gleich sind → diese dann gleichsetzen	**Gleichsetzverfahren**: (1*) = (2*) $2x + 2 = x + 3 \Rightarrow x = 1$
Einsetzverfahren: geht immer → eine Gleichung nach einer Variablen auflösen und in die zweite Gleichung einsetzen	**Einsetzverfahren:** z.B. (2*) in (1) $-2x + (x + 3) = 2 \Rightarrow -x = -1 \Rightarrow x = 1$
Additionsverfahren: nicht immer günstig → Gleichungen so multiplizieren und dann addieren/ subtrahieren, dass eine Variable wegfällt.	**Additionsverfahren:** z.B. (1) + 2 · (2) $-2x + y + 2 \cdot (x - y) = 2 + 2 \cdot (-3) \Rightarrow y = 4$ Durch Einsetzen in die (1*) oder (2*) erhält man den Wert der jeweils anderen Variable $\Rightarrow$ **L = { (1 | 4) }**

Grundlagen zu Bruchtermen

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Bestimmung der Definitionsmenge: Enthält ein Bruchterm genau eine Variable, so gibt man an, welche Zahlen der Grundmenge für die Variable eingesetzt werden dürfen. Diese Zahlenmenge heißt **Definitionsmenge** des Bruchterms. Es müssen diejenigen Einsetzungen ausgeschlossen werden, bei denen durch Null dividiert wird.	$G = \mathbb{Q}; \quad \frac{3+x}{x^2-x} = \frac{3+x}{x(x-1)}; \quad \Rightarrow D = \mathbb{Q}\backslash\{0;1\}$
Kürzen und Erweitern von Bruchtermen: Einen Bruch **kürzen** bedeutet, dass Zähler und Nenner durch den gleichen Term dividiert werden.	$\frac{(a+b)\cdot(c+d)}{(a-b)\cdot(c+d)} \overset{:(c+d)}{=} \frac{a+b}{a-b}$
Einen Bruch **erweitern** bedeutet, dass Zähler und Nenner mit dem gleichen Term multipliziert werden.	$\frac{a}{b} \overset{\cdot(c+d)}{=} \frac{a\cdot(c+d)}{b\cdot(c+d)}$

Bruchgleichungen

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Eine Gleichung heißt **Bruchgleichung,** wenn die Variable in mindestens einem Nenner auftritt.	$\frac{4}{x-6}=\frac{2}{x}$
Lösungsstrategie:	**Rechenweg:**
1. Hauptnenner suchen	1. HN: $x \cdot (x-6)$
2. Definitionsmenge bestimmen	2. $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 6\}$ (Nullstellen des Hauptnenners)
3. Beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren und gleichzeitig kürzen	3. $4x = 2 \cdot (x-6)$
4. Gleichung lösen	4. $4x = 2x - 12$ $2x = -12$ $x = -6$
5. Lösungsmenge angeben (Definitionsmenge beachten!)	5. $L = \{ -6 \}$

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
So wie die Multiplikation eine Kurzschreibweise der Addition gleicher Zahlen darstellt, ist die **Potenzschreibweise** eine Kurzschreibweise der Multiplikation gleicher Zahlen dar.	$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
Negative Hochzahlen bedeuten, dass die Faktoren im Nenner gezählt werden.	$10^{-4} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}$ $2^{-5} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$
Beachte: es gilt $a^0 = 1 \; für \; a \neq 0$	
Gleitkommaschreibweise: Eine Zahl a zwischen 1 und 10 wird mit einer Zehnerpotenz multipliziert.	$1{,}3 \cdot 10^4 = 13000$ bzw. $4100000 = 4{,}1 \cdot 10^6$ $1{,}3 \cdot 10^{-3} = 0{,}0013$ bzw. $0{,}000041 = 4{,}1 \cdot 10^{-5}$

Strahlensatz

Definitionen und Regeln | *Beispiele*

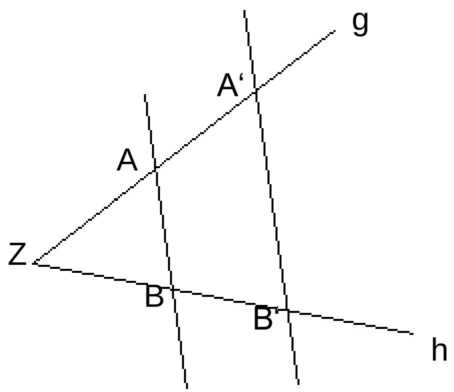
Strahlensatz:

Werden zwei Geraden g und h mit gemeinsamen Punkt Z von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich

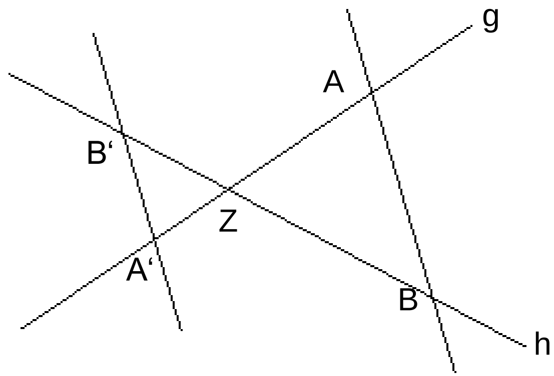
a) je zwei Abschnitte auf g wie die entsprechenden Abschnitte auf h

b) die Abschnitte auf den Parallelen wie <u>die von Z aus gemessenen</u> entsprechenden Abschnitte auf g oder h.

V – Figur:



Z – Figur:



$$\frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Laplace – Experimente

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Ein Zufallsexperiment ist ein Experiment, bei dem verschiedene Ergebnisse eintreten können.	a) Ein idealer Würfel (auch Laplace – Würfel genannt) hat den Ergebnisraum Ω = {1; 2; 3; 4; 5; 6} und es gilt P(1) = P(2) = … = P(6) = $\frac{1}{6}$
Ein **Laplace – Experiment** ist ein Zufallsexperiment, bei dem jedes der möglichen Ergebnisse gleichwahrscheinlich ist.	b) Eine ideale Münze (auch Laplace – Münze genannt) hat den Ergebnisraum Ω = {K; Z} und es gilt P(K) = P(Z) = $\frac{1}{2}$
Sind bei einem Laplace – Experiment n verschiedene Ergebnisse möglich, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für jedes dieser Ergebnisse $\frac{1}{n}$.	
Die Menge aller möglichen Ergebnisse nennt man **Ergebnisraum Ω.**	

Laplace – Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Fasst man bestimmte Ergebnisse eines Zufallsexperiments zu einer Menge zusammen, so erhält man ein **Ereignis**.	a) Werfen eines Würfels – Ereignis A: „ungerade Zahl“ $P(A) = P(\{1; 3; 5\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
Die Ergebnisse, die zu einem Ereignis gehören, nennt man **günstige Ergebnisse.**	b) Werfen eines Würfels – Ereignis B: „5 oder 6“ $P(B) = P(\{5; 6\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
Sind alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich, so ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A: $\boldsymbol{P(A) = \frac{\textit{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\textit{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}}$	

Zählprinzip

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Zählprinzip: Sucht man bei einem mehrstufigem Zufallsexperiment die Anzahl der möglichen Ergebnisse, so ermittelt man die Anzahl der Möglichkeiten der einzelnen Stufen und multipliziert diese miteinander.	a) Es sollen drei Plätze besetzt werden. Für den 1. Platz gibt es n_1, für den 2. Platz n_2 und für den 3. Platz n_3 Möglichkeiten. So gibt es insgesamt $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ Möglichkeiten. b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass sich Otto, Anna und Emma auf vier Stühle setzen? Otto Anna Emma $4 \cdot 3 \cdot 2 =$ 24 Möglichkeiten c) Wie viele verschiedene vierstellige natürliche Zahlen kann man aus den Ziffern 1, 3, 9 und 0 bilden, wenn jede dieser Ziffern i) genau einmal Ii) auch mehrfach vorkommen darf? i) $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ (Null steht nie vorne) ii) $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$