Potenzgesetze

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Begriffe: a heißt **Basis,** n heißt **Exponent**, a^n heißt **Potenz** $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ Faktroen} = a^n$	
Man setzt außerdem fest: $a^1 = a$ und $a^0 = 1$ (für $a \neq 0$)	
Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert/ dividiert, indem man die Exponenten addiert/ subtrahiert.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ bzw. $a^n : a^m = a^{n-m}$ (für $a \neq 0$)
Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert/ dividiert, indem man die Basen multipliziert/ dividiert und den Exponenten beibehält.	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ bzw. $a^n : b^n = (a : b)^n$ (für $b \neq 0$)
Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten miteinander multipliziert und die Basis beibehält.	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Umformungen in Summen

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Zwei **Produkte**, die genau die gleichen Variablen in jeweils gleicher Potenz enthalten, nennt man **gleichartig**. Sie werden addiert/ subtrahiert, indem man die Koeffizienten addiert/ subtrahiert und die gemeinsamen Variablen beibehält.	$3a^2b^3 + 5a^2b^3 = 8\ a^2b^3$ bzw. $6xy^2 - 2xy^2 = 4xy^2$
Eine Klammer, vor der ein Pluszeichen steht, nennen wir **Plusklammer**. **Plusklammern** können einfach weggelassen werden.	$3x + (7y - 2z) = 3x + 7y - 2z$
Steht vor einer Klammer ein Minuszeichen, so spricht man von einer **Minusklammer**. **Minusklammern** und das Minuszeichen vor der Klammer dürfen weggelassen werden, wenn man vor jedem Summanden in der Klammer das Vorzeichen ändert.	$9x - (3y + 7z) = 9x - 3y - 7z$ $9x - (-3y + 7z) = 9x + 3y - 7z$ $9x - (3y - 7z) = 9x - 3y + 7z$ $9x - (-3y - 7z) = 9x + 3y + 7z$

Ausmultiplizieren und Ausklammern

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Wird ein Produkt mithilfe des Distributivgesetzes in eine Summe umgeformt, so spricht man von **Ausmultiplizieren.**	$3a \cdot (2b + 4c - a) = 6ab + 12ac - a^2$ $7 \cdot (2x - 7) = 14x - 49$
$2 \cdot (a + 3b) = 2 \cdot a + 2 \cdot 3b$ $= 2 \cdot a + 6 \cdot b$	
Wird umgekehrt eine Summe mithilfe des Distributivgesetzes in ein Produkt umgeformt, so spricht man von **Ausklammern.**	$4abc + 12abx - 8a^2b = 4ab \cdot (c + 3x - 2a)$ $5ab^2 - 25a^2b^2 = 5ab^2 \cdot (1 - 5a)$

Multiplizieren von Summen

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Zwei Summen werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied der einen Summe mit jedem Glied der anderen Summe multipliziert und die entsprechenden Produkte addiert: (a + b) · (c + d) = ac + ad + bc + bd (a + b) · (c – d) = ac – ad + bc – bd (a – b) · (c – d) = ac – ad – bc + bd (a + b + c) · (d + e + f) = ad + ae + af + bd + be + bf + cd + ce + cf	a) (2a + 3b) · (3a – 4x) = 6a² - 8ax + 9ab – 12bx b) (2a – 3b) · (-3x - 4y) = -6ax – 8ay + 9bx + 12by **Zur Überprüfung**: Hat die erste Summe m Glieder und die zweite Summe n Glieder, so hat die nach der Multiplikation entstandene Summe insgesamt n + m Glieder!
Binomische Formeln: 1. Plusformel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 2. Minusformel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 3. Plus-Minusformel: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$	$(2x+1)^2 = 2x^2 + 4x + 1$ $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$ $(3-2x)\cdot(3+2x) = 9 - 4x^2$

Achsen- und Punktsymmetrie

Definitionen und Regeln

Achsensymmetrie:

- Sind die Punkte **P und P‘ symmetrisch bezüglich der Achse a**, so steht die Strecke $\overline{PP'}$ senkrecht auf der Achse a und wird von dieser halbiert.

- Symmetrische Strecken sind gleich lang, symmetrische Winkel sind gleich groß, symmetrische Geraden sind entweder parallel oder schneiden sich auf der Achse a.

- Spezielle Geraden:

  - **Mittelsenkrechte m** einer Strecke $\overline{AB}$ $\widehat{=}$ Symmetrieachse zu den Punkten A und B

  - **Winkelhalbierene w** eines Winkels α $\widehat{=}$ Symmetrieachse der beiden Schenkel des Winkels

Definition und Regeln

Punktsymmetrie:

- Sind die Punkte P und P‘ symmetrisch bezüglich des Symmetriezentrums Z, dann wird die Verbindungsstrecke dieser Punkte von Z halbiert.

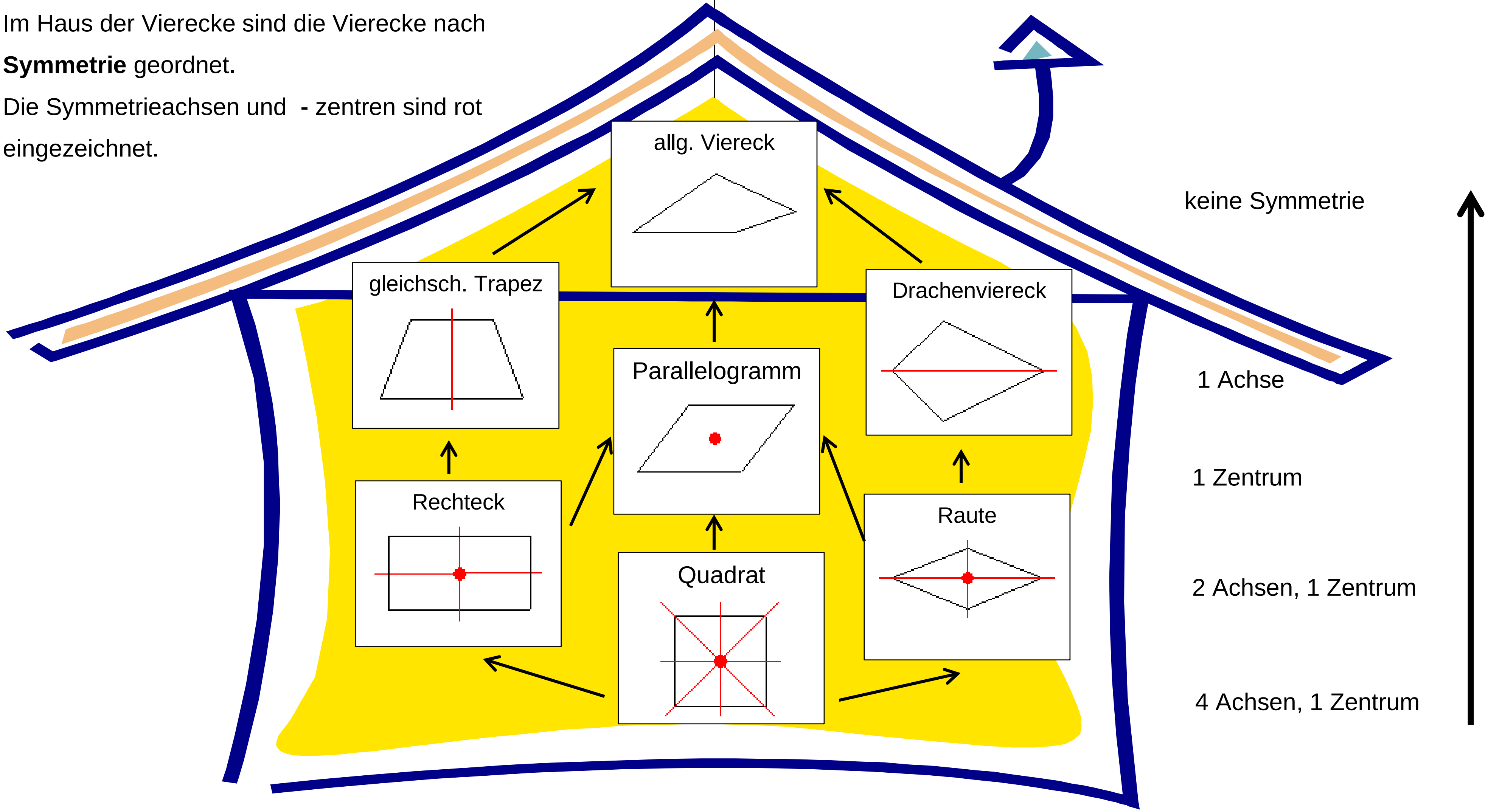
- Symmetrische Strecken sind gleich lang und parallel, symmetrische Winkel sind gleich groß, symmetrische Geraden sind parallel.

Haus der Vierecke

Definitionen und Regeln	*Definition und Regeln*

Im Haus der Vierecke sind die Vierecke nach **Symmetrie** geordnet.

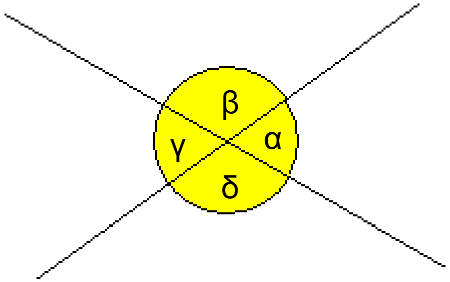
Die Symmetrieachsen und - zentren sind rot eingezeichnet.



Winkel an Geradenkreuzungen

Definitionen und Regeln

einfache Geradenkreuzung:

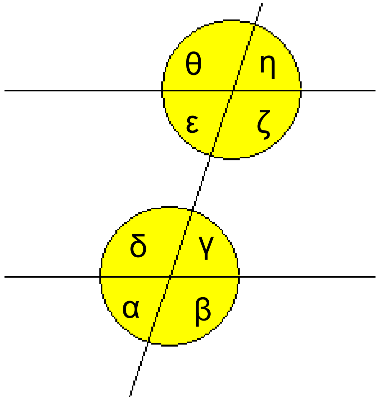


Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°, z.B. α + β = 180°

Scheitelwinkel sind gleich groß: α = γ und β = δ

Definition und Regeln

Doppelkreuzung:



Stufenwinkel (F – Winkel) an parallelen Geraden sind gleich groß: z.B. α = ε oder β = ζ

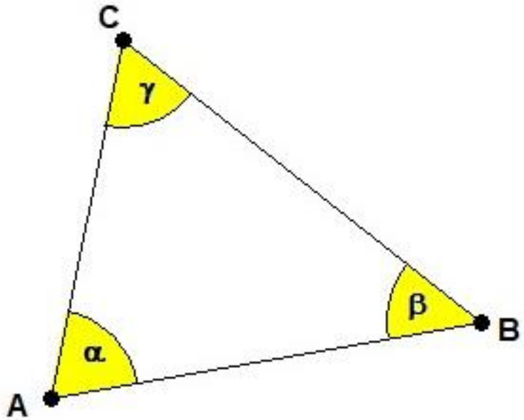
Wechselwinkel (Z – Winkel) an parallelen Geraden sind gleich groß: z.B. γ = ε oder β = θ

Winkelsummen

Definitionen und Regeln

Winkelsumme im Dreieck

In jedem Dreieck beträgt die Summe der Größen der drei Innenwinkel 180°.



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

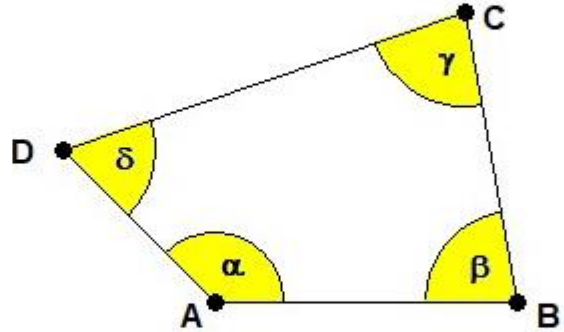
Definition und Regeln

Winkelsumme im Vieleck

In jedem n-Eck beträgt die Winkelsumme $(n-2) \cdot 180°$ **.**

Speziell für das Viereck gilt damit:

Die Summe der Größen der vier Innenwinkel im Viereck beträgt 360°.



$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$

Gleichungen - Begriffe

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Eine **Gleichung** besteht aus zwei Termen, die mit einem Gleichheitszeichen verbunden sind. Sie kann Variablen enthalten.	$3x + 6 = 7x + 1$
Die **Definitionsmenge D** bestimmt, welche Zahlen prinzipiell anstelle der Variablen eingesetzt werden dürfen. Man muss alle Zahlen ausschließen, die mathematisch nicht erlaubt sind!	
Die **Lösungsmenge L** enthält alle Zahlen, für die die Gleichung zu einer wahren Aussage führt und in der Definitionsmenge enthalten sind.	13x = 35 mit D = $\mathbb{Z}$ x = $\frac{35}{13}$ aber L = {}
Eine Gleichung heißt **allgemeingültig**, wenn jede mögliche Zahl eine Lösung der Gleichung darstellt.	5x + 1 = 1 + 5x → L = $\mathbb{Q}$
Eine Gleichung heißt **unlösbar**, wenn es keine Zahl gibt, für die die Gleichung eine wahre Aussage liefert.	7x = 3x → L = { }

7.10	Grundwissen Mathematik – Zahlen und Operationen	Klasse 7	Gymnasium Landau a. d. Isar

Lösen von Gleichungen - Äquivalenzumformungen

„Strategie“	***Rechenweg***	***Äquivalenzumformung***
Ausmultiplizieren oder „Aufräumen“: beide Seiten vereinfachen	$9x - (2x - 5) = 3(x + 1) + x - 13$ $9x - 2x + 5 = 3x + 3 + x - 13$ $7x + 5 = 4x - 10$	Ausmultiplizieren und gleichartige Terme zusammenfassen
„Trennen“: x-Terme auf die eine Seite und x-freie Terme (z.B. Zahlen) auf die andere Seite bringen	$7x - 4x + 5 - 5 = 4x - 4x - 10 - 5$ $3x = -15$	Addieren/ Subtrahieren des gleichen Terms oder der gleichen Zahl auf **beiden** Seiten der Gleichung
x isolieren: Koeffizient „entfernen“	$x = -5$	Multiplizieren/ Dividieren mit der gleichen Zahl ungleich Null auf **beiden** Seiten
Lösungsmenge angeben: Definitionsmenge beachten	$L = \{ -5 \}$	

Eine Gleichung darf nur so umgeformt werden, dass die Lösungsmenge unverändert bleibt.

Solche Umformungen nennt man **Äquivalenzumformungen**!

Kongruenz und Kongruenzsätze

Definitionen und Regeln

Kongruenz:
Figuren der Zeichenebene, die sich beim Aufeinanderlegen zur Deckung bringen lassen, heißen **deckungsgleich** oder **kongruent.**

Erfüllen die gegebenen Stücke eines Dreiecks die Bedingung eines Kongruenzsatzes, so ist es eindeutig konstruierbar.

Definition und Regeln

Kongruenzsätze für Dreiecke:

SSS – Satz:

Dreiecke sind bereits kongruent, wenn sie in allen drei Seiten übereinstimmen.

SWS – Satz:

Dreiecke sind bereits kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

SWW – Satz und WSW – Satz:

Dreiecke sind bereits kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei gleich liegenden Winkeln übereinstimmen.

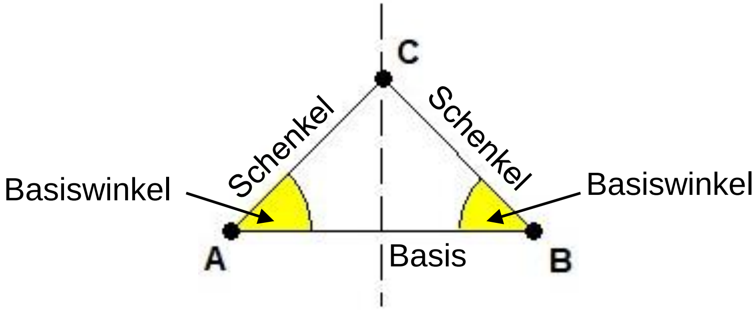
SsW – Satz:

Dreiecke sind bereits kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen.

Besondere Dreiecke

Definitionen und Regeln

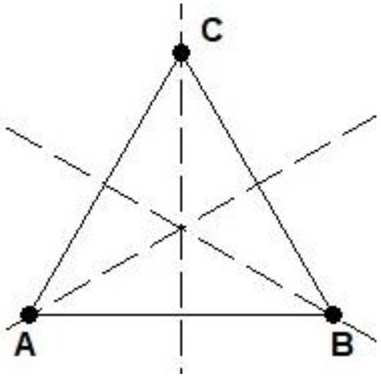
Gleichschenkliges Dreieck



Eigenschaften: - 2 Seiten im Dreieck sind gleich lang
- Basiswinkel sind gleich groß
- das Dreieck ist achsensymmetrisch

Definition und Regeln

Gleichseitiges Dreieck



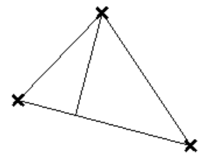
Eigenschaften: - alle drei Seiten sind gleich lang
- alle Winkel sind gleich groß mit Größe 60°
- das Dreieck hat 3 Symmetrieachsen

7.13	Grundwissen Mathematik – Raum und Form	Klasse 7	Gymnasium Landau a. d. Isar

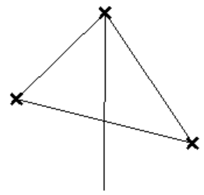
Transversalen im Dreieck

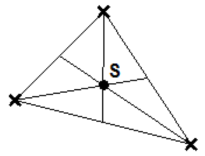
Definitionen und Regeln | *Definition und Regeln*

Die Höhe verläuft durch die Ecke und steht senkrecht auf der gegenüberliegenden Seite. Sie kann auch außerhalb des Dreiecks liegen!

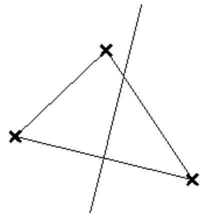


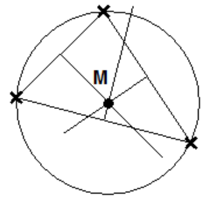
Die Seitenhalbierende verläuft durch den gegenüberliegenden Punkt und den <u>Mittelpunkt</u> der Seite.
Die Seitenhalbierenden schneiden sich im **Schwerpunkt S** des Dreiecks.



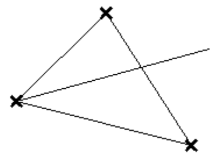


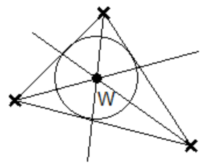
Die Mittelsenkrechte verläuft durch den Mittelpunkt einer Strecke und steht auf dieser <u>senkrecht</u>.
Die Mittelsenkrechten schneiden sich im **Umkreismittelpunkt M** des Dreiecks.





Die Winkelhalbierende halbiert einen Winkel.
Die Winkelhalbierenden schneiden sich im **Inkreismittelpunkt W** des Dreiecks.





Thaleskreis

Definitionen und Regeln	*Beispiele*

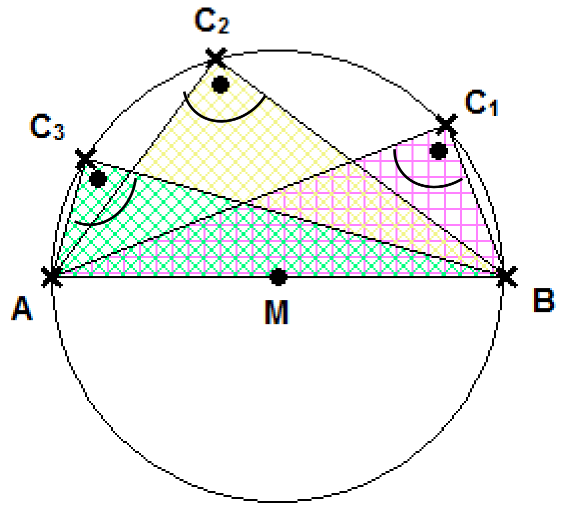
Satz des Thales:

Ist das Dreieck ABC bei C rechtwinklig, so liegt C auf einem Kreis mit der Hypotenuse [AB] als Durchmesser.

Dieser Kreis über der Hypotenuse [AB] heißt **Thaleskreis**.

Umkehrung des Satz des Thales gilt ebenso:

Liegt die Ecke C eines Dreiecks ABC auf einem Kreis über der Strecke [AB], dann hat das Dreieck bei C immer einen rechten Winkel.



Kenngrößen von Daten

Definitionen und Regeln	*Beispiele*
Median eines geordneten Datensatzes: bei ungerader Anzahl: Wert in der Mitte des Datensatzes bei gerader Anzahl: arithmetisches Mittel der beiden Datensätze in der Mitte	Datensatz: 2 – 2 – 3 – 5 – 7 – 8 – 8 – 9 – 9 - 12 → Median: (7 + 8) : 2 = 7,5
Spannweite: Differenz aus dem größten und kleinsten Wert eines Datensatzes	→ Spannweite: 12 – 2 = 10
Quartile: Der Median zerlegt den Datensatz in 2 Blöcke. → das untere Quartil ist der Median vom unteren Block → das obere Quartil ist der Median vom oberen Block (der Median gehört zu keinem der beiden Blöcke!)	→ unteres Quartil: 3 (Block von 2 - … - 7) → oberes Quartil: 9 (Block von 8 - …. – 12)
Boxplot: veranschaulicht die Streuung der Daten Begrenzungen: Minimalwert, unteres Quartil, oberes Quartil, Maximalwert